Exercice de spécialité – Bac blanc TES avril 2018

Une municipalité vient de mettre en place le service «vélo en liberté».
Il s'agit d'un service de location de vélos à la journée.
Les vélos sont disponibles sur deux sites A et B et doivent être ramenés en fin de journée indifféremment dans l'un des deux sites. Après une étude statistique, on considère que :

- si un vélo est loué sur le site A, la probabilité d'être ramené en A est 0,6 ;
- si un vélo est loué sur le site B, la probabilité d'être ramené en B est 0,7.

1) En notant respectivement A et B les états « le vélo est en A » et « le vélo est en B », traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets A et B.

2) Donner M la matrice de transition de ce graphe en considérant les sommets dans l'ordre A,B.

3) Pour tout entier naturel n, on note a_n (respectivement b_n) la probabilité qu'un vélo quelconque soit, après n jours, sur le site A (respectivement sur le site B).
On note P_n la matrice $(a_n \quad b_n)$ correspondant à l'état probabiliste après n jours.
Le premier jour, tous les vélos sont distribués également sur les deux sites.
On a donc $P_0 = (0{,}5 \quad 0{,}5)$.

a. On donne : $M^2 = \begin{pmatrix} 0{,}48 & 0{,}52 \\ 0{,}39 & 0{,}61 \end{pmatrix}$. Calculer P_2 en donnant le détail des calculs matriciels.

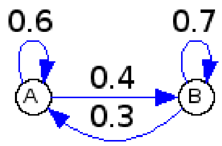
b. Calculer P_4 et interpréter le résultat dans le contexte du problème.
On arrondira les résultats à 10^{-2} près.

c. Déterminer l'état stable du graphe, noté $P = (a \quad b)$.

d. Tous les mois, un véhicule est affecté à la redistribution des vélos afin de rétablir au mieux la répartition initiale qui était de 70 vélos sur chaque site.
La municipalité envisage d'affecter un véhicule pouvant contenir 12 vélos.
Ce choix parait-il adapté à la situation ? Justifier.

Correction

0,75 pt **1)** Voir le graphe ci-contre. **0,75 pt**



2) $M = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$ **0,5 pt**

0,5pt

3)

0,25 pt

0,5 pt **a.** $P_2 = P_0 \times M^2 = (0{,}5 \quad 0{,}5) \times \begin{pmatrix} 0{,}48 & 0{,}52 \\ 0{,}39 & 0{,}61 \end{pmatrix}$ **0,25 pt : calculs / 0 pt sinon**

Donc $P_2 = (0{,}5 \times 0{,}48 + 0{,}5 \times 0{,}39 \quad 0{,}5 \times 0{,}52 + 0{,}5 \times 0{,}61) = (0{,}435 \quad 0{,}565)$

b. $P_4 = P_0 \times M^4 \approx (0{,}43 \quad 0{,}57)$ **0,25 pt**

0,5pt La probabilité qu'un vélo soit en A au bout de 4 jours est de 0,43 et la probabilité qu'il soit en B est de 0,57.
On peut aussi dire qu'environ 43% des vélos sont en A et 57% des vélos sont en B. **0,25 pt**

c. On cherche l'état stable P de la forme $(a \quad 1-a)$ car la somme des coefficients doit être égale à 1.

1,75 pt Cet état stable vérifie $P = P \times M$. **0,5 pt**

$P = P \times M \Leftrightarrow (a \quad 1-a) = (a \quad 1-a) \times \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$ **0,5 pt**

$\Leftrightarrow (a \quad 1-a) = (0{,}6a + 0{,}3(1-a) \quad 0{,}4a + 0{,}7(1-a))$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0{,}6a + 0{,}3(1-a) \\ 1-a = 0{,}4a + 0{,}7(1-a) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a - 0{,}6a + 0{,}3a = 0{,}3 \\ -a - 0{,}4a + 0{,}7a = 0{,}7 - 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}7a = 0{,}3 \\ -0{,}7a = -0{,}3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow a = \frac{3}{7}$ **0,5 pt**

L'état stable du graphe est donc $P = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$ **0,25 pt**

d. La matrice M ne contient pas de 0 donc les états probabilistes P_n convergent vers l'état stable P. **0,25 pt**

1, pt Au bout de plusieurs jours, $\frac{3}{7}$ des vélos seront en A et $\frac{4}{7}$ seront en B.

Au total, il y a 140 vélos dont il y aura 60 vélos en A et 80 vélos en B.
Pour rééquilibrer, il faut donc transporter 10 vélos de B vers A. **0,5 pt**
Le véhicule prévu est donc adapté à la situation. **0,25 pt**