<u>DEVOIR COMMUN DU 24 JANVIER 2019 Corrigé</u>

Exercice 1 (4 points) *Commun à tous les élèves*

Partie A

1) $P(A \cap V) = P(A) \times P_A(V) = 0{,}60 \times 0{,}98 = 0{,}588$.
   La probabilité que la bille choisie soit vendable et provienne de la machine A est 0,588.
2) A et B forment une partition de l'univers, donc $P(V) = P(A \cap V) + P(B \cap V)$.
   On en déduit que $P(B \cap V) = P(V) - P(A \cap V) = 0{,}96 - 0{,}588 = 0{,}372$.
   $P_B(V) = \frac{P(B \cap V)}{P(B)} = \frac{0{,}372}{1-0{,}60} = 0{,}93$.
   La probabilité que la bille choisie soit vendable sachant qu'elle provient de la machine B est 0,93.
3) $P_{\overline{V}}(B) = \frac{P(B \cap \overline{V})}{P(\overline{V})} = \frac{P(B) - P(B \cap V)}{1 - P(V)} = \frac{0{,}4 - 0{,}372}{0{,}04} = 0{,}7$.
   70 % des billes non vendables proviennent de la machine B. Le technicien a raison.

Partie B

1)
   a. On répète 40 fois de façon identique et indépendante la même épreuve de Bernoulli dont le succès : « La bille est noire » a une probabilité égale à 0,2.
      La variable X, qui compte le nombre de succès, suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = 0{,}2$.
   b. $P(X = 10) = \binom{40}{10} 0{,}2^{10} \times 0{,}8^{30} \simeq 0{,}107$.
      La probabilité que le sachet choisi contienne exactement 10 billes noires est égale à 0,107.
   c. $P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) \simeq 0{,}924$.
      La probabilité que le sachet choisi contienne au moins 5 billes noires est égale à 0,924.

2) Soit n le nombre de billes contenues dans le sachet.
   La variable aléatoire X_n égale au nombre de billes noires contenues dans le sachet suit alors la loi binomiale de paramètres n et 0,2.
   $P(X_n \geq 1) = 1 - P(X_n = 0) = 1 - 0{,}8^n$.
   D'après la calculatrice, $1 - 0{,}8^{20} \simeq 0{,}988$ et $1 - 0{,}88^{21} \simeq 0{,}991$.
   Chaque sachet doit donc contenir au moins 21 billes pour que la probabilité qu'il contienne au moins une bille noire soit supérieure ou égale à 99 %.

Exercice 2 (6 points) *Commun à tous les élèves*

Partie A : étude d'un cas particulier

1) C est de la forme ku avec $k = 12$ et $u(t) = 1 - e^{-\frac{7}{80}t}$. u est dérivable sur $[0; +\infty[$ donc C aussi et $\forall\, t \geq 0$:

$$C'(t) = 12 \times \frac{7}{80} e^{-\frac{7}{80}t} = \frac{21}{20} e^{-\frac{7}{80}t}$$

$\forall\, t \geq 0$, $\frac{21}{20} > 0$ et $e^{-\frac{7}{80}t} > 0$ donc $C'(t) > 0$ sur $[0; +\infty[$ et ainsi, C est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

2) $\lim_{t\to+\infty} \left(-\frac{7}{80}t\right) = -\infty$ et $\lim_{X\to-\infty} e^X = 0$ donc $\lim_{t\to+\infty} e^{-\frac{7}{80}t} = 0$. Ainsi, $\lim_{t\to+\infty} \left(1 - e^{-\frac{7}{80}t}\right) = 1$ et donc, par produit avec 12, $\lim_{t\to+\infty} C(t) = 12$.

Comme $12 < 15$, le traitement de ce patient n'est pas efficace.

Partie B : étude de fonction

1) f est de la forme uv avec $u(x) = \frac{105}{x}$ et $v(x) = \left(1 - e^{-\frac{3}{40}x}\right)$. Ainsi : $u'(x) = -\frac{105}{x^2}$ et $v'(x) = \frac{3}{40} e^{-\frac{3}{40}x}$

On a $f' = u'v + uv'$ donc, $\forall\, x \in]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{-105}{x^2}\left(1 - e^{-\frac{3}{40}x}\right) + \frac{105}{x} \times \frac{3}{40} e^{-\frac{3}{40}x}$

$$= \frac{105}{x^2}\left(-1 + e^{-\frac{3}{40}x} + \frac{3x}{40} e^{-\frac{3}{40}x}\right)$$

On a bien $f'(x) = \frac{105g(x)}{x^2}$ pour tout $x > 0$, où g est la fonction proposée.

2) $\forall\, x > 0$, $105 > 0$ et $x^2 > 0$.

De plus, d'après le tableau de variation de g, $\forall\, x > 0$, $g(x) < 0$. On en déduit que $\forall\, x > 0$, $f'(x) < 0$ et donc, f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

3) $f(1) \approx 7{,}6$ et $f(80) \approx 1{,}3$

Sur $[1; 80]$, f est continue (car dérivable), f est strictement décroissante (d'après la question précédente) et 5,9 est compris entre $f(1)$ et $f(80)$ donc, d'après le théorème de bijection, l'équation $f(x) = 5{,}9$ admet une unique solution sur $[1; 80]$.

Comme f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$:

- le minimum de f sur $]0; 1]$ est $f(1) \approx 7{,}6$ donc l'équation $f(x) = 5{,}9$ n'a pas de solution sur $]0; 1]$.
- le maximum de f sur $[80; +\infty[$ est $f(80) \approx 1{,}3$ donc l'équation $f(x) = 5{,}9$ n'a pas de solution sur $[80; +\infty[$.

Ainsi, l'équation $f(x) = 5{,}9$ admet une unique solution sur $]0; +\infty[$. On note x_0 cette solution.

D'après la calculatrice, avec un pas de 1, on a : $8 < x_0 < 9$; Avec un pas de 0,1, on a : $8{,}1 < x_0 < 8{,}2$.

Avec un pas de 0,01, on a : $8{,}10 < x_0 < 8{,}11$. Ainsi, une valeur approchée de x_0 au dixième est 8,1.

Partie C : détermination d'un traitement adéquat

1) Dans cette question $d = 105$.

a. La concentration du médicament 6 heures après le début de la perfusion est $C(6)$.

$C(6) = \frac{105}{a}\left(1 - e^{-\frac{a}{80}\times 6}\right) = \frac{105}{a}\left(1 - e^{-\frac{3a}{40}}\right)$

b. Il s'agit de résoudre l'équation $C(6) = 5{,}9$ d'inconnue a sur $]0; +\infty[$ car il est dit que a est un réel strictement positif.

$C(6) = 5{,}9 \Leftrightarrow \frac{105}{a}\left(1 - e^{-\frac{3a}{40}}\right) = 5{,}9 \Leftrightarrow f(a) = 5{,}9 \Leftrightarrow a = x_0$ d'après la question 3. De la partie B.

Ainsi, au dixième près, la clairance de ce patient est : 8,1 $L.h^{-1}$.

2) On a : $C(t) = \frac{d}{a}\left(1 - e^{-\frac{a}{80}t}\right)$.

Pour que le traitement soit efficace, on doit avoir : $\lim_{t\to+\infty} C(t) = 15$.

Avec un raisonnement analogue que celui vu dans la partie A question 1., on montre que $\lim_{t\to+\infty} C(t) = \frac{d}{a}$.

Donc, le traitement soit efficace$\Leftrightarrow \frac{d}{a} = 15 \Leftrightarrow d = a \times 15$. Or $a \approx 8{,}1$ et $8{,}1 \times 15 = 121{,}5$.

Ainsi, pour que le traitement soit efficace, le débit doit être de 122 micromoles par heure, à l'unité près.

Exercice 3 (5 points) *Commun à tous les élèves*

Partie A : Section du cube par le plan $(\boldsymbol{MNP})$

1) (MP) et (FG) sont coplanaires dans le plan (EFG). Elles ne sont pas parallèles, donc elles se coupent en un point L.

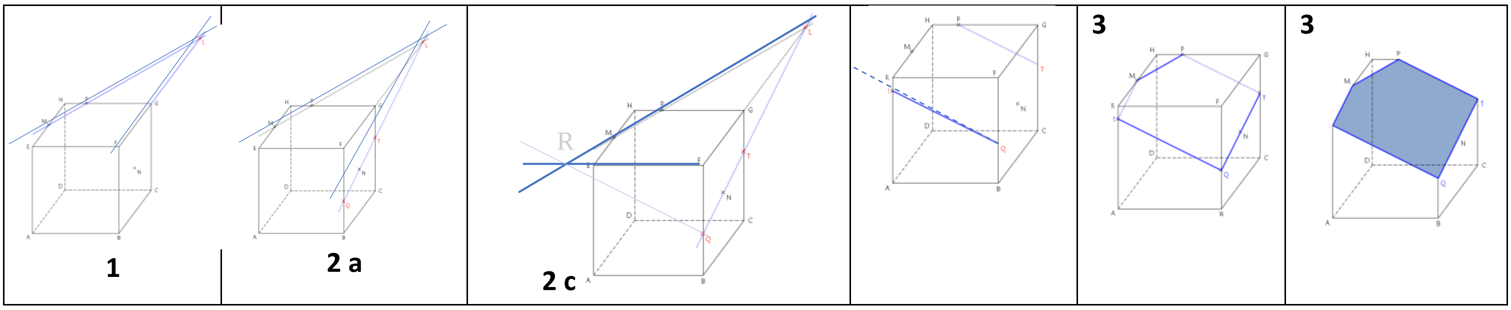
2) On admet que les droites (LN) et (CG) sont sécantes et on note T leur point d'intersection. On admet que les droites (LN) et (BF) sont sécantes et on note Q leur point d'intersection.

a. Construire les points T et Q en laissant apparents les traits de construction.

b. $L \in (MP)$ et $(MP) \subset (MNP)$. Comme $N \in (MNP)$ la droite (LN) est incluse dans le plan (MNP). $Q \in (LN)$ donc $Q \in (MNP)$.

c. (MP) et (EF) se coupent en un point R qui est commun aux deux plans (MNP) et (ABF). La droite d'intersection des plans (MNP) et (ABF) est la droite (QR).

3) En déduire une construction de la section du cube par le plan (MNP). On n'attend pas d'autre justification que les traits de construction. Vous ferez apparaitre la section obtenue en rouge.



Partie B L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

1) On a $M\left(0;\frac{1}{2};1\right)$, $N\left(1;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ et $P\left(\frac{1}{4};1;1\right)$.

2) a. $\overrightarrow{MP}(\frac{1}{4};\frac{1}{2};0)$. Un point $Z(x\,;y\,;z) \in (MP) \Leftrightarrow$ il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{MZ} = t\overrightarrow{MP}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{t}{4} \\ y - \frac{1}{2} = \frac{t}{2} \\ z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{t}{4} \\ y = \frac{1}{2} + \frac{t}{2} \\ z = 1 \end{cases}$.

Ceci est une représentation paramétrique de la droite (MP).

b. On a $F(1;0;1)$ et $G(1;1;1)$. Donc $\overrightarrow{FG}(0;1;0)$. Un point $Z(x\,;y\,;z) \in (FG) \Leftrightarrow$ il existe $s \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{FZ} = s\overrightarrow{FG}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y = s \\ z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = s \\ z = 1 \end{cases}$. Ceci est une représentation paramétrique de la droite (FG).

Les coordonnées de L vérifient le système (S): $\begin{cases} x = \frac{t}{4} \\ y = \frac{1}{2} + \frac{t}{2} \\ z = 1 \\ x = 1 \\ y = s \end{cases}$. $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ z = 1 \\ t = 4 \\ y = \frac{1}{2} + \frac{4}{2} = \frac{5}{2} \end{cases}$. Donc $L\left(1;\frac{5}{2};1\right)$.

c. On admet que (AT) admet pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 8s \\ y = 8s \\ z = 5s \end{cases}$. Le vecteur $\vec{u}(8;8;5)$ est un vecteur directeur de (AT) et le vecteur $\overrightarrow{MP}\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2};0\right)$ est un vecteur directeur de (MP). $\vec{u} = k\overrightarrow{MP} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 = \frac{k}{4} \\ 8 = \frac{k}{2} \\ 5 = 0 \end{cases}$. Ce système n'admet pas de solution, donc les droites (AT)*et* (MP) ne sont pas parallèles.

Les droites (AT) et (MP) sont sécantes si et seulement si le système (S'): $\begin{cases} 8s = \frac{t}{4} \\ 8s = \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \\ 5s = 1 \end{cases}$ admet une solution unique.

$(S') \Leftrightarrow \begin{cases} s = \frac{1}{5} \\ \frac{8}{5} = \frac{t}{4} \\ \frac{8}{5} = \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = \frac{1}{5} \\ t = \frac{32}{5} \\ \frac{t}{2} = \frac{8}{5} - \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = \frac{1}{5} \\ t = \frac{32}{5} \\ t = \frac{16}{5} - 1 = \frac{11}{5} \end{cases}$ Ce système n'admet pas de solution, donc (AT) et (MP) ne sont pas sécantes. (AT) et (MP) ne sont ni parallèles ni sécantes, donc elles ne sont pas coplanaires.

Exercice 4 (5 points) *Elèves n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

1) $d_1 = \frac{1}{2}d_0 + 100 = \frac{1}{2} \times 300 + 100 = 250$ $a_1 = \frac{1}{2}d_0 + \frac{1}{2}a_0 + 70 = \frac{1}{2} \times 300 + \frac{1}{2} \times 450 + 70 = 150 + 225 + 70 = 445$

2)

a. On fait fonctionner l'algorithme pour $n = 1$: $D = 300$ $A = 450$

b. Pour $k = 1 : D = \frac{300}{2} + 100 = 250$ et $A = \frac{450}{2} + \frac{250}{2} + 70 = 420$ Fin Pour

Ainsi, les nombres que l'on obtient en sortie sont $D = 250$ et $A = 420$.

Ces résultats ne sont pas cohérents avec ceux obtenus à la question 1. car nous trouvons $A = 420$ au lieu de $A = 445$.

c. Pour que l'algorithme affiche les résultats souhaités, il faut mettre l'instruction : « $A \leftarrow \frac{A}{2} + \frac{D}{2} + 70$ » avant l'instruction « $D \leftarrow \frac{D}{2} + 100$ » dans la boucle Pour.

3) Pour tout entier naturel $n, e_n = d_n - 200$

a. Pour tout entier naturel : $e_{n+1} = d_{n+1} - 200 = \frac{1}{2}d_n + 100 - 200 = \frac{1}{2}d_n - 100$.

Or, pour tout entier naturel n, $e_n = d_n - 200$ donc , pour tout entier naturel n, $d_n = e_n + 200$.

Ainsi, pour tout entier naturel n : $e_{n+1} = \frac{1}{2}(e_n + 200) - 100 = \frac{1}{2}e_n + 100 - 100 = \frac{1}{2}e_n$.

On en déduit que la suite (e_n) est géométrique de premier terme $e_0 = d_0 - 200 = 300 - 200 = 100$ et de raison $\frac{1}{2}$.

b. Comme (e_n) est géométrique, pour tout entier naturel n, $e_n = e_0 \times q^n = 100 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Or, pour tout entier naturel n, $d_n = e_n + 200$ donc , pour tout entier naturel n, $d_n = 100 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 200$.

c. $-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, donc, par produit avec 100, $\lim_{n \to +\infty} 100 \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, et par somme avec 200, $\lim_{n \to +\infty} d_n = 200$. On en déduit que la suite (d_n) est convergente et converge vers 200.

4)

a. Etudions le signe de $2n^2 - (n+1)^2$:

$2n^2 - (n+1)^2 = 2n^2 - n^2 - 2n - 1 = n^2 - 2n - 1$.

Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = x^2 - 2x - 1$.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 8$

$\Delta > 0$ donc P est du signe de $a = 1$, donc positif, à l'extérieur des racines :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 1 + \sqrt{2}$

Ainsi, pour tout réel $x \geq 1 + \sqrt{2}$, $P(x) \geq 0$. Or $1 + \sqrt{2} \approx 2{,}4$ donc pour tout réel $x \geq 3$, $P(x) \geq 0$,
donc en particulier, pour tout entier naturel $n \geq 3, P(n) \geq 0$
cela signifie que pour tout entier naturel $n \geq 3$, on a :$2n^2 - (n+1)^2 \geq 0$ ou encore : $2n^2 \geq (n+1)^2$

b. Soit P_n la propriété : « $2^n \geq n^2$ »

- Pour $n = 4$, $2^n = 2^4 = 16$ et $n^2 = 4^2 = 16$. On a bien : $2^n \geq n^2$ pour $n = 4$ donc P_4 est vraie.
- On suppose que pour un entier $n \geq 4$ fixé, P_n est vraie, c'est-à-dire, on suppose que $2^n \geq n^2$.

Montrons que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire montrons que $2^{n+1} \geq (n+1)^2$.

$2^{n+1} = 2 \times 2^n$ et $2^n \geq n^2$ car P_n est vraie.

Ainsi : $2^{n+1} \geq 2n^2$. Or, $n \geq 4$ donc en particulier, $n \geq 3$ et donc on peut dire, d'après la question précédente que $2n^2 \geq (n+1)^2$. Finalement, on a : $2^{n+1} \geq 2n^2 \geq (n+1)^2$ et donc P_{n+1} est vraie.

- P_4 est vraie, P_n est héréditaire, donc P_n est vraie pour tout entier naturel $n \geq 4$.

c. Pour tout entier naturel n, $\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$. Soit n un entier supérieur ou égal à 4.

On a $2^n \geq n^2$ donc, en inversant ces deux nombres strictement positifs, on a $\frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n^2}$, soit : $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{1}{n^2}$

On multiplie les deux membres de cette inégalité par $100n$, qui est strictement positif, et on obtient : $100n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{100}{n}$.

De plus, $100n$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ sont positifs donc, $100n\left(\frac{1}{2}\right)^n \geq 0$.

On a bien, pour tout entier naturel $n \geq 4$: $0 \leq 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{100}{n}$

d. $\lim_{n \to +\infty} \frac{100}{n} = 0$, donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \to +\infty} 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

De plus, $-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et donc $\lim_{n \to +\infty} 110\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

On en déduit, par somme que $\lim_{n \to +\infty} a_n = 340$.

Cela signifie, qu'au bout d'un moment, le nombre d'internautes au niveau avancé se stabilisera à 340.