Lycée Saint–Exupéry

BAC BLANC – Avril 2019 – Terminales S

Epreuve de Mathématiques – Durée : 4 heures.

Il sera tenu compte de la qualité de votre rédaction.
L'usage des calculatrices est autorisé.

Exercice 1 (5 points) *Commun à tous les élèves*

Une entreprise fabrique des puces électroniques qui sont utilisées pour des matériels aussi différents que des téléphones portables, des lave–linge ou des automobiles.
À la sortie de fabrication, 5% d'entre elles présentent un défaut et sont donc éliminées. Les puces restantes sont livrées aux clients.
On dit qu'une puce a une durée de vie courte si cette durée de vie est inférieure ou égale à 1 000 heures. On observe que 2% des puces livrées ont une durée de vie courte.
On note L l'évènement " La puce est livrée ".
On note C l'évènement " La puce a une durée de vie courte c'est–à–dire inférieure ou égale à 1 000 heures ".
Etant donné deux évènements A et B, on note $P_A(\text{B})$ la probabilité conditionnelle de l'évènement B sachant que l'évènement A est réalisé.
Les questions* 1, 2 *et* 3 *sont indépendantes.

1. On tire au hasard une puce fabriquée par l'entreprise.

a. Donner la valeur $P_L(\text{C})$.

b. Quelle est la probabilité que la puce soit livrée et ait une durée de vie strictement supérieure à 1 000 heures ?

c. Quelle est la probabilité que la puce soit éliminée ou ait une durée de vie courte à la sortie de la chaine de fabrication?

Dans la suite de l'exercice, on s'intéresse seulement aux puces livrées aux clients.

2. On appelle X la variable aléatoire correspondant à la durée de vie en heures d'une telle puce.
On suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre λ.

a. Montrer que $\lambda = -\dfrac{\ln(0{,}98)}{1000}$.

b. Calculer la probabilité qu'une puce ait une durée de vie supérieure à 10 000 heures. On arrondira le résultat à 10^{-3} près.

c. Calculer $P(20\,000 \leqslant X \leqslant 30\,000)$. On arrondira le résultat à 10^{-3} près. Interpréter ce résultat.

3. Les ingénieurs de l'entreprise ont mis au point un nouveau procédé de fabrication. On suppose qu'avec ce nouveau procédé, la probabilité qu'une puce livrée donnée ait une durée de vie courte est égale à 0,003.
On prélève au hasard 15 000 puces prêtes à être livrées. On admettra que ce prélèvement de 15 000 puces revient à effectuer un tirage avec remise de 15 000 puces parmi l'ensemble de toutes les puces électroniques produites par l'entreprise et prêtes à être livrées.
On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de puces ayant une vie courte dans cet échantillon.

a. Justifier que Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 15\,000$ et $p = 0{,}003$.

b. Calculer l'espérance de la variable aléatoire Y.

c. Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité $P(40 \leqslant Y \leqslant 50)$.

Exercice 2 (5 points) *Elèves n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on donne les points :

$A(1\,;2\,;3)$, $B(3\,;0\,;1)$, $C(-1\,;0\,;1)$, $D(2\,;1\,;-1)$, $E(-1\,;-2\,;3)$ et $F(-2\,;-3\,;4)$.

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant votre réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Affirmation 1 : Les trois points A, B et C sont alignés.

Affirmation 2 : Le vecteur $\vec{n}(0\,;1\,;-1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

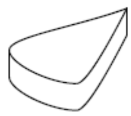
Affirmation 3 : La droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants et leur point d'intersection est le milieu du segment [BC].

Affirmation 4 : Les droites (AB) et (CD) sont sécantes.

Affirmation 5 : Le plan (ABC) est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne : $x-y-z+3=0$.

Exercice 3 (5 points) *Commun à tous les élèves*

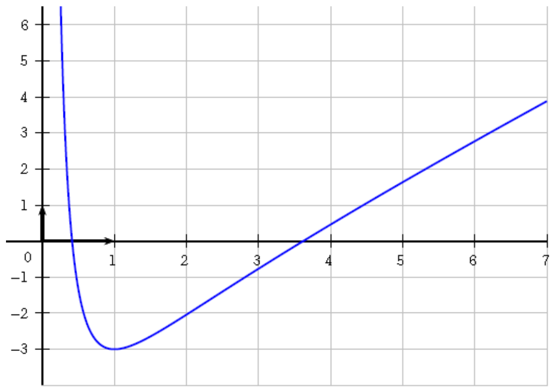
La chocolaterie Delmas décide de commercialiser de nouvelles confiseries : des palets au chocolat en forme de goutte d'eau. Pour cela, elle doit fabriquer des moules sur mesure qui doivent répondre à la contrainte suivante : pour que cette gamme de bonbons soit rentable, la chocolaterie doit pouvoir en fabriquer au moins 80 avec 1 litre de pâte liquide au chocolat.



Partie A : modélisation par une fonction

Le demi contour de la face supérieure du palet sera modélisé par une portion de la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x^2-2x-2-3\ln(x)}{x}$ donnée ci-dessous.

Le repère est orthogonal d'unité 2 cm en abscisses et 1 cm en ordonnées.



1. Soit φ la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$\varphi(x)=x^2-1+3\ln(x).$$

a. Calculer $\varphi(1)$ et la limite de φ en 0.

b. Etudier les variations de φ sur $]0\,;+\infty[$.
En déduire le signe de $\varphi(x)$ selon les valeurs de x.

2. a. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b. Montrer que sur $]0\,;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{\varphi(x)}{x^2}$. En déduire le tableau de variation de f.

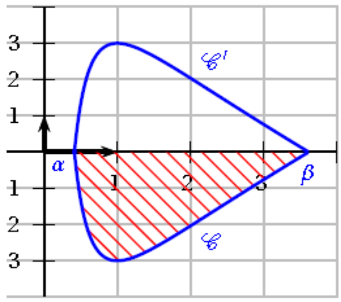
c. Prouver que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $]0\,;1]$.
Déterminer à la calculatrice une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

On admettra que l'équation $f(x)=0$ a également une unique solution β sur $[1;+\infty[$ avec $\beta\approx 3{,}61$ à 10^{-2} près.

d. Soit F la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $F(x)=\dfrac{1}{2}x^2-2x-2\ln(x)-\dfrac{3}{2}(\ln(x))^2$.
Montrer que F est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.

Partie B : résolution du problème

Dans cette partie, les calculs seront effectués avec les valeurs approchées à 10^{-2} près de α et β de la partie A.



Pour obtenir la forme de la goutte, on considère la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction *f* restreinte à l'intervalle $[\alpha\ ;\beta]$ ainsi que son symétrique $\mathscr{C}'$ par rapport à l'axe des abscisses.

Les deux courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ délimitent la face supérieure du palet comme l'indique la figure.

On rappelle que le repère est orthogonal d'unité 2 cm en abscisses et 1 cm en ordonnées.

Pour des raisons esthétiques, le chocolatier aimerait que ses palets aient une épaisseur de 0,5 cm.

Dans ces conditions, la contrainte de rentabilité serait-elle respectée?

Exercice 4 (5 points) *Commun à tous les élèves*

On considère la suite (I_n) définie pour n entier naturel non nul par : $I_n = \int_0^1 x^n e^{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Pour tout entier naturel non nul et tout réel x, on pose $g_n(x) = x^n e^{x^2}$.

1. a. Démontrer que la fonction G_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $G_1(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction g_1 .

b. En déduire la valeur exacte de I_1.

c. Pour tout entier naturel non nul et tout réel x, on pose $h_n(x) = x^n$.

Montrer que, pour tout réel x, $(h_{n+1}G_1)'(x) = g_{n+2}(x) + \frac{n+1}{2}g_n(x)$.

d. En déduire que, pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 1, $I_{n+2} = \frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2}I_n$.

e. Calculer I_3 et I_5.

2. On considère l'algorithme suivant :

Initialisation	Affecter à n la valeur 1 Affecter à u la valeur $\frac{1}{2}e - \frac{1}{2}$
Traitement	Tant que $n < 21$ Affecter à u la valeur $\frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2}u$ Affecter à n la valeur $n+2$
Sortie	Afficher u

Quel terme de la suite (I_n) obtient-on en sortie de cet algorithme? Aucune justification n'est demandée.

3. a. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $I_n \geqslant 0$.

b. Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

c. En déduire que la suite (I_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

4. Démontrer que pour tout entier n non nul, $\frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n+1}$.

En déduire la valeur de ℓ.

Exercice 4 (5 points) *Elèves ayant suivi l'enseignement de spécialité à rendre sur copie séparée*

Partie A

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k}\right)$, on considère les points $A(1;5;-2)$, $B(7;-1;3)$ et $C(-2;7;-2)$ et on note $\mathscr{P}$ le plan (ABC).

On cherche une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ sous la forme : $ax + by + cz = 73$, où a, b et c sont des nombres réels.

On note X et Y les matrices colonnes : $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ $et\ Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que X vérifie la relation : $MX = 73Y$, où M est la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 7 & -1 & 3 \\ -2 & 7 & -2 \end{pmatrix}$

2. Soit N la matrice : $N = \begin{pmatrix} 19 & 4 & -13 \\ -8 & 6 & 17 \\ -47 & 17 & 36 \end{pmatrix}$

À l'aide d'une calculatrice, on a calculé les produits $M \times N$ et $N \times M$, et on a obtenu les copies d'écran suivantes :

Pour $M \times N$:

Ans	1	2	3
1	73	0	0
2	0	73	0
3	0	0	73

Pour $N \times M$:

Ans	1	2	3
1	73	0	0
2	0	73	0
3	0	0	73

À l'aide de ces informations, justifier que la matrice M est inversible et exprimer sa matrice inverse M^{-1} en fonction de la matrice N.

3. Montrer alors que : $X = NY$.
En déduire que le plan $\mathscr{P}$ admet pour équation cartésienne : $10x + 15y + 6z = 73$.

Partie B

L'objectif de cette partie est l'étude des points à coordonnées entières du plan $\mathscr{P}$ ayant pour équation cartésienne : $10x + 15y + 6z = 73$.

1. Soit $M(x\,;\,y\,;\,z)$ un point appartenant au plan $\mathscr{P}$ et au plan d'équation $z = 3$.
On suppose que les coordonnées x, y et z appartiennent à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

a. Montrer que les entiers x et y sont solutions de l'équation $(E) : 2x + 3y = 11$.

b. Justifier que le couple (7 ; −1) est une solution particulière de (E) puis résoudre l'équation (E) pour x et y appartenant à $\mathbb{Z}$.

c. Montrer qu'il existe exactement deux points appartenant au plan $\mathscr{P}$ et au plan d'équation $z = 3$ et dont les coordonnées appartiennent à l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. Déterminer les coordonnées de ces deux points.

2. Dans cette question, on se propose de déterminer tous les points $M(x\,;\,y\,;\,z)$du plan $\mathscr{P}$ dont les coordonnées sont des entiers naturels.
Soient x, y et z des entiers naturels tels que $10x + 15y + 6z = 73$.

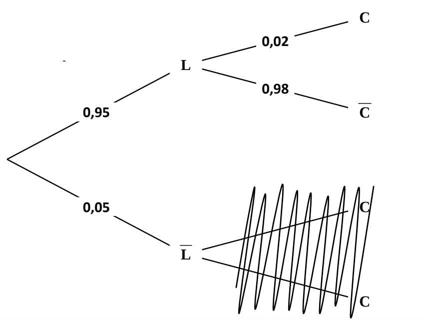
a. Montrer que y est impair.

b. Montrer que : $x \equiv 1\ [3]$. On admet que : $z \equiv 3\ [5]$.

c. On pose alors : $x = 1 + 3p$, $y = 1 + 2q$ et $z = 3 + 5r$, où p, q et r sont des entiers naturels.
Montrer que le point $M(x\,;\,y\,;\,z)$ appartient au plan $\mathscr{P}$ si et seulement si $p + q + r = 1$.

d. En déduire qu'il existe exactement trois points du plan $\mathscr{P}$ dont les coordonnées sont des entiers naturels.
Déterminer les coordonnées de ces points.

Correction



Ex 1 :

1. a. L'énoncé stipule que 2% des puces livrées ont la vie courte, il donne donc la valeur de $P_L(C) = 0{,}02$.
Représentons la situation donnée par l'énoncé par un arbre pondéré :

b. La probabilité demandée est celle de l'intersection des événements L et $\bar{C}$:

On a $P(L \cap \bar{C}) = P(L) \times P_L(\bar{C}) = 0{,}95 \times 0{,}98 = 0{,}931$.

q° 2.

c. La probabilité demandée est celle de l'union des événements $\bar{L}$ et C. Cet événement $\bar{L} \cup C$ est l'événement contraire du précédent (question b.). On a $P(\bar{L} \cup C) = P(\overline{L \cap \bar{C}}) = 1 - P(L \cap \bar{C}) = 1 - 0{,}931 = 0{,}069$.

2. a. On sait d'après l'énoncé que $P(X \leqslant 1\,000) = 0{,}02 \Leftrightarrow 1 - P(X > 1\,000) = 0{,}02$
$\Leftrightarrow P(X > 1\,000) = 0{,}98$. Or, dans une loi exponentielle, on a la propriété $P(X > a) = e^{-\lambda a}$
Donc $0{,}98 = e^{-1\,000\lambda} \Leftrightarrow \ln(0{,}98) = -1\,000\lambda \Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln(0{,}98)}{1\,000}$

b. La probabilité demandée est $P(X > 10\,000) = e^{-10\,000\lambda} = e^{10\ln(0{,}98)} \approx 0{,}817$

c. $P(20\,000 \leq X \leq 30\,000) = P(X \geq 20\,000) - P(X > 30\,000) = e^{-20\,000\lambda} - e^{-30\,000\lambda}$
$= e^{20\ln(0{,}98)} - e^{30\ln(0{,}98)} \approx 0{,}122$.

Interprétation : cela signifie qu'environ 12,2% des puces livrées aux clients ont une durée de vie comprise entre 20 000 et 30 000 heures.

3. a. On répète 15 000 fois de suite de manière identique et indépendante l'épreuve de Bernoulli dont le succès est " la puce a une durée de vie courte " avec une probabilité $p = 0{,}003$.
Soit Y la variable aléatoire qui compte le nombre de succès. On a donc une loi binomiale de paramètres $n = 15\,000$ et $p = 0{,}003$: $\mathscr{B}(15\,000 ; 0{,}003)$.

b. L'espérance de la variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ est donnée par la formule $E(Y) = np$, donc $E(Y) = 15\,000 \times 0{,}003 = 45$.

c. $P(40 \leq Y \leq 50) = P(Y \leq 50) - P(Y < 40) = P(Y \leq 50) - P(Y \leq 39) \approx 0{,}589$. (calculatrice)

Ex2 :

Affirmation 1 : Les trois points A, B, et C sont alignés. $\overrightarrow{AB}(2 ; -2 ; -2)$ $\quad$ $\overrightarrow{AC}(-2 ; -2 ; -2)$
Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont clairement non proportionnelles donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires d'où les points A, B et C ne sont pas alignés.

L'affirmation 1 est fausse.

Affirmation 2 : Le vecteur $\vec{n}(0 ; 1 ; -1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).
Les points A, B et C sont non alignés donc A, B et C forment un plan.
$\overrightarrow{AB}.\vec{n} = 2\times0 - 2\times1 - 2\times(-1) = 0$ $\quad$ $\overrightarrow{AC}.\vec{n} = -2\times0 - 2\times1 - 2\times(-1) = 0$
$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) il est donc normal au plan (ABC).

L'affirmation 2 est vraie.

Affirmation 3 : La droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants et leur point d'intersection est le milieu du segment [BC].

- $\overrightarrow{EF}(-1 ; -1 ; 1)$ $\quad$ $\overrightarrow{EF}.\vec{n} = -1\times0 - 1\times1 + 1\times(-1) = -2$.

La droite (EF) n'est donc pas parallèle au plan (ABC). Elle est donc sécante avec (ABC).

$M(x ; y ; z) \in (EF) \Leftrightarrow$ il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que : $\overrightarrow{EM} = t\,\overrightarrow{EF} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -t-1 \\ y = -t-2 \\ z = t+3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

Le milieu K de [BC] a pour coordonnées: $\left(\frac{3-1}{2} ; 0 ; \frac{1+1}{2}\right)$ soit $(1 ; 0 ; 1)$.

$\begin{cases} 1 = -t-1 \\ 0 = -t-2 \\ 1 = t+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = -2 \\ t = -2 \end{cases}$ Il existe une valeur de t telle que les coordonnées de K vérifient l'équation paramétrique de (EF) et on a $\overrightarrow{EK} = -2\overrightarrow{EF}$. Le point K appartient bien à (EF).

L'affirmation 3 est vraie.

Affirmation 4 : Les droites (AB) et (CD) sont sécantes.
$\overrightarrow{AB}(2\,;-2\,;-2)$; $\overrightarrow{CD}(3\,;1\,;-2)$; $2\times1\neq-2\times3$. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires donc (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.

$M(x\,;y\,;z)\in(\text{AB}) \Leftrightarrow$ il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que : $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2t+1 \\ y=-2t+2 \\ z=-2t+3 \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$

$M(x\,;y\,;z)\in(\text{CD}) \Leftrightarrow$ il existe $s\in\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{CM}=s\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3s-1 \\ y=s \\ z=-2s+1 \end{cases} \quad s\in\mathbb{R}$

(AB) et (CD) sont sécantes si le système suivant a une solution :

$$\begin{cases} 2t+1=3s-1 \\ -2t+2=s \\ -2t+3=-2s+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\frac{3}{2}s-1 \\ -3s+2=s \\ -2t+3=-2s+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\frac{3}{2}s-1 \\ s=\frac{1}{2} \\ -2t+3=-2s+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-\frac{1}{4} \\ s=\frac{1}{2} \\ -2\left(-\frac{1}{4}\right)+3\neq-2\times\frac{1}{2}+1 \end{cases}$$

Le système n'a pas de solution donc les droites (AB) et (CD) ne sont pas sécantes.

L'affirmation 4 est fausse.

Autre méthode : Si (AB) et (CD) sont sécantes alors les coordonnées de D vérifient l'équation cartésienne de (ABC).

Affirmation 5 : Le plan (ABC) est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne : $x-y-z+3=0$.
(ABC) a pour vecteur normal $\vec{n}(0\,;1\,;-1)$. Le plan $\mathscr{P}$ a pour vecteur normal $\vec{n}'(1\,;-1\,;-1)$
$\vec{n}.\vec{n}'=0\times1+1\times(-1)-1\times(-1)=0$. $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont orthogonaux donc (ABC) et P sont perpendiculaires.

L'affirmation 5 est vraie.

Ex3 : **Partie A :**

1. Soit φ la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $\varphi(x)=x^2-1+3\ln(x)$

a. $\varphi(1)=1^2-1+3\ln(1)=0$ $\lim\limits_{x\to0}(x^2-1)=-1$ et $\lim\limits_{x\to0}3\ln(x)=-\infty$ car d'après le cours $\lim\limits_{x\to0}\ln(x)=-\infty$ donc par somme

$$\boldsymbol{\lim_{x\to0}\varphi(x)=-\infty}$$

b. φ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ **comme somme de fonctions dérivables sur]0;+∞[**. $\varphi'(x)=2x+\dfrac{3}{x}$.

$\forall x\in]0\,;+\infty[$, $2x>0$ et $\dfrac{3}{x}>0 \Rightarrow \varphi'(x)>0$ $\forall x\in]0\,;+\infty[$ d'où φ est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
signe de $\varphi'(x)$	‖	+		+	
Var φ	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	

D'après le tableau de variation de φ
- pour tout $x\in]0\,;1]$, $\varphi(x)\leqslant\varphi(1) \Leftrightarrow \varphi(x)\leqslant0$
- pour tout $x\in[1\,;+\infty[$, $\varphi(x)\geqslant\varphi(1) \Leftrightarrow \varphi(x)\geqslant0$

D'où le tableau de signes de φ :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $\varphi(x)$	‖	-	0	+	

2. $f(x)=\dfrac{x^2-2x-2-3\ln(x)}{x}$ pour $x\in]0\,;+\infty[$.

a. <u>Limite en 0 :</u> $\lim\limits_{x\to0}(x^2-2x-2)=-2$ et $\lim\limits_{x\to0}(-3\ln(x))=+\infty$.

Par somme, $\lim\limits_{x\to0}(x^2-2x-2-3\ln(x))=+\infty$. De plus, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}=+\infty$ donc, par produit des limites :

$$\boldsymbol{\lim_{x\to0}f(x)=+\infty}$$

Limite en $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-2x-2)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(-3\ln(x))=-\infty$.

On a donc une forme indéterminée au numérateur. $f(x)=\dfrac{x^2-2x-2-3\ln(x)}{x}=x-2-\dfrac{2}{x}-\dfrac{3\ln(x)}{x}$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3\ln(x)}{x}=0$ car d'après le cours $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(-\dfrac{2}{x})=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)=+\infty$ donc par somme $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$

b. $f'(x)=\dfrac{\varphi(x)}{x^2}$ sur $]0\,;+\infty[$? f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme quotient, de la somme d'une fonction du second degré et de la fonction ln multipliée par 3, par la fonction $x\mapsto x$.

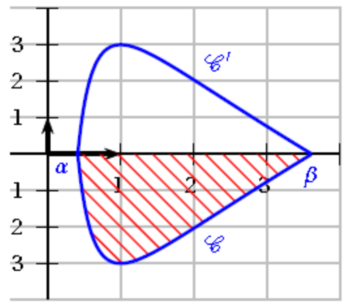
$u(x)=x^2-2x-2-3\ln(x)\Rightarrow u'(x)=2x-2-\dfrac{3}{x}$; $v(x)=x\Rightarrow v'(x)=1$ $\quad f'=\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ soit

$$f'(x)=\frac{\left(2x-2-\frac{3}{x}\right)\times x-(x^2-2x-2-3\ln(x))}{x^2}=\frac{2x^2-2x-3-x^2+2x+2+3\ln(x)}{x^2}=\frac{x^2-1+3\ln(x)}{x^2}$$

$$=\frac{\varphi(x)}{x^2}$$

x	0		1		$+\infty$
$\varphi(x)$		-	0	+	
x^2	0	+		+	
signe de $f'(x)$	$\Vert$	-	0	+	
Var f	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

$f(1)=\dfrac{1^2-2\times1-2-3\ln(1)}{1}=-3$



c. $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $]0\,;1]$?
Sur $]0\,;1]$, f est dérivable donc continue et strictement décroissante et $0\in]-3\,;+\infty[$ donc l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur $]0\,;1[$. D'après la calculatrice : $\alpha\approx 0{,}41$

d. Soit F la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $F(x)=\dfrac{1}{2}x^2$

$-2x-2\ln(x)-\dfrac{3}{2}(\ln(x))^2$.

F primitive de f sur $]0\,;+\infty[$? La fonction F est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.
On calcule $F'(x)$.

$$F'(x)=\frac{1}{2}\times2x-2-\frac{2}{x}-\frac{3}{2}\times2\times\frac{1}{x}\times\ln(x)=x-2-\frac{2}{x}-\frac{3\ln(x)}{x}=\frac{x^2-2x-2-3\ln(x)}{x}=f(x).$$

f est bien une primitive de F sur $]0\,;+\infty[$.

Partie B : résolution du problème

Soit $\mathscr{D}$ le domaine hachuré délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x=\alpha$ et $x=\beta$. Sur l'intervalle $[\alpha\,;\beta]$, la fonction f est négative, donc l'aire de $\mathscr{D}$ est :

$$\mathscr{A}=-\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x=-(F(\beta)-F(\alpha))=F(\alpha)-F(\beta)\approx F(0{,}41)-F(3{,}61)\approx 5{,}60 \text{ unités d'aire } (u.a.).$$

L'aire du domaine compris entre les deux courbes est $2\mathscr{A}\approx 11{,}20$ *u.a.*
Une unité d'aire est égale à 2 cm^2 donc l'aire entre les deux courbes vaut environ 22,40 cm^2.
L'épaisseur du palet doit être de 0,5 cm donc le volume du palet est d'environ

$$2{,}40\times0{,}5=11{,}20\ \text{cm}^3.$$

Le volume, en cm^3, de 80 palets est donc $80\times11{,}20=896<1000$, donc la chocolaterie peut fabriquer 80 palets avec 1 000 cm^3, soit 1 litre de chocolat liquide.
Dans ces conditions, la contrainte de rentabilité est respectée.

Ex4 : Pour tout $n \geqslant 1$, $I_n = \int_0^1 x^n e^{x^2}\,\mathrm{d}x$.Pour tout $n \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}$, $g_n(x) = x^n e^{x^2}$

1. a. G_1 définie dérivable sur $\mathbb{R}$ par $G_1(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$. $g_1(x) = xe^{x^2} = \frac{1}{2} \times 2xe^{x^2}$

$g_1 = \frac{1}{2}u'u$ avec $u(x) = x^2$ et $u'(x) = 2x$ d'où $G_1 = \frac{1}{2}\, e^u$ est une primitive de g_1 sur $\mathbb{R}$ soit :

$G_1(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$ est bien une primitive de g_1 sur $\mathbb{R}$. On peut également utiliser la méthode $G_1' = g_1$.

b. $I_1 = \int_0^1 xe^{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\, e^{1^2} - \frac{1}{2}e^0 = \frac{1}{2}\, e - \frac{1}{2} = \frac{e-1}{2}$

c. Pour tout $n \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}$, $h_n(x) = x^n$. $(h_{n+1}G_1)'(x) = g_{n+2}(x) + \frac{n+1}{2}g_n(x)$?

$(h_{n+1}G_1)(x) = x^{n+1} \times \frac{1}{2}e^{x^2}$

$(h_{n+1}G_1)'(x) = (n+1)\, x^n \times \frac{1}{2}e^{x^2} + x^{n+1} \times xe^{x^2} = \frac{n+1}{2}\, x^n e^{x^2} + x^{n+2}\, e^{x^2} = \frac{n+1}{2}\, g_n(x) + g_{n+2}(x)$

On a bien : $(h_{n+1}G_1)'(x) = g_{n+2}(x) + \frac{n+1}{2}g_n(x)$.

d. Pour tout $n \geqslant 1$, $I_{n+2} = \frac{1}{2}\, e - \frac{n+1}{2}I_n$?

D'après c. on a : $\int_0^1 (h_{n+1}G_1)'(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 (g_{n+2}(x) + \frac{n+1}{2}g_n(x))\,\mathrm{d}x$

En appliquant la linéarité de l'intégrale, on obtient : $\int_0^1 (h_{n+1}G_1)'(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 g_{n+2}(x)\,\mathrm{d}x + \frac{n+1}{2}\int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \left[(h_{n+1}G_1)(x)\right]_0^1 = I_{n+2} + \frac{n+1}{2}I_n \;\Leftrightarrow\; \left[x^{n+1} \times \frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1 = I_{n+2} + \frac{n+1}{2}I_n$

$\Leftrightarrow 1^{n+1} \times \frac{1}{2} \times e^{1^2} - 0 = I_{n+2} + \frac{n+1}{2}I_n \;\Leftrightarrow\; \frac{e}{2} = I_{n+2} + \frac{n+1}{2}I_n \;\Leftrightarrow\; I_{n+2} = \frac{1}{2}\, e - \frac{n+1}{2}I_n$

e. D'après d.

$I_3 = \frac{e}{2} - \frac{1+1}{2} \times I_1 = \frac{e}{2} - I_1 = \frac{e}{2} - \left(\frac{e}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

$I_5 = \frac{e}{2} - \frac{3+1}{2} \times I_3 = \frac{e}{2} - 2I_3 = \frac{e}{2} - 2 \times \frac{1}{2} = \frac{e}{2} - 1 \approx 0{,}359\ u.a.$

2. En sortie de cet algorithme, le terme de la suite (I_n) affiché est I_{21}.

3. a. Pour tout $n \geqslant 1$, $I_n \geqslant 0$? $g_n(x) = x^n e^{x^2}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{x^2} > 0$ et $x^n \geqslant 0$ donc $g_n(x) \geqslant 0$. Or on sait que si une fonction f est positive sur un intervalle $[a\,;b]$ alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$. Or $I_n = \int_0^1 x^n e^{x^2}\mathrm{d}x$ donc $I_n \geqslant 0$.

b. (I_n) décroissante ?

$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^{n+1}e^{x^2}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x^n e^{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (x^{n+1} - x^n e^{x^2})\,\mathrm{d}x$ (linéarité de l'intégrale) $= \int_0^1 x^n(x-1)e^{x^2}\,\mathrm{d}x$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{x^2} > 0$, $x^n \geqslant 0$ et $x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$ donc $\forall x \in [0\,;1]$, $x^n\,(x-1)e^{x^2}$ est du signe de $x-1$ soit négatif.

En conclusion : D'après le théorème énoncé en 3.a., $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$ d'où (I_n) est décroissante.

c. La suite (I_n) est décroissante et positive donc minorée par 0 donc (I_n) est convergente.

4. ℓ? Pour tout $x \in [0\,;1]$, $x^n e^0 \leqslant x^n e^{x^2} \leqslant x^n e^{1^2}$ car *exp* est strictement croissante.

d'où : $\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 \leqslant I_n \leqslant e\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n+1}$ donc, d'après le théorème d'encadrement, $\lim I_n = 0$ ainsi $\ell = 0$.

Correction ex4 spé:

Exercice 4 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$, on considère les points A$(1\,;\,5\,;\,-2)$, B$(7\,;\,-1\,;\,3)$ et C$(-2\,;\,7\,;\,-2)$ et on note P le plan (ABC).
On cherche une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ sous la forme : $ax+by+cz=73$, où a, b et c sont des nombres réels.

On note X et Y les matrices colonnes : $X=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

1. Soit la matrice $M=\begin{pmatrix}1&5&-2\\7&-1&3\\-2&7&-2\end{pmatrix}$.

   Si le plan (ABC) a pour équation $ax+by+cz=73$, alors les coordonnées des points A, B et C vérifient l'équation du plan, c'est-à-dire : $\left\{\begin{array}{rcl}ax_A+by_A+cz_A&=&73\\ax_B+by_B+cz_B&=&73\\ax_C+by_C+cz_C&=&73\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}a+5b-2c&=&73\\7a-b+3c&=&73\\-2a+7b-2c&=&73\end{array}\right.$

   $MX=\begin{pmatrix}1&5&-2\\7&-1&3\\-2&7&-2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+5b-2c\\7a-b+3c\\-2a+7b-2c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}73\\73\\73\end{pmatrix}=73\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=73Y.$

2. Soit la matrice : $N=\begin{pmatrix}19&4&-13\\-8&6&17\\-47&17&36\end{pmatrix}$.

   À l'aide d'une calculatrice, on a calculé les produits $M\times N$ et $N\times M$, et on a obtenu les copies d'écran suivantes :

   Pour $M\times N$:

Ans	1	2	3
1	73	0	0
2	0	73	0
3	0	0	73

   Pour $N\times M$:

Ans	1	2	3
1	73	0	0
2	0	73	0
3	0	0	73

   Si on appelle I la matrice unité d'ordre 3, la calculatrice montre que $MN=NM=73I$ donc que $M\left(\frac{1}{73}N\right)=\left(\frac{1}{73}N\right)M=I$.

   Cela prouve que la matrice M est inversible et que son inverse est $M^{-1}=\dfrac{1}{73}N$.

3. $MX=73Y \iff M^{-1}MX=M^{-1}\times 73Y \iff X=\dfrac{1}{73}N\times 73Y \iff X=NY$

   $X=NY \iff \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19&4&-13\\-8&6&17\\-47&17&36\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19+4-13\\-8+6+17\\-47+17+36\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\15\\6\end{pmatrix}$

   Le plan $\mathscr{P}$ a donc pour équation $10x+15y+6z=73$.

Partie B

L'objectif de cette partie est l'étude des points à coordonnées entières du plan P ayant pour équation cartésienne : $10x+15y+6z=73$.

1. Soit M$(x\,;\,y\,;\,z)$ un point appartenant au plan $\mathscr{P}$ et au plan d'équation $z=3$. On suppose que les coordonnées x, y et z appartiennent à l'ensemble $\mathbf{Z}$ des entiers relatifs.

   a. Si $z=3$ et $10x+15y+6z=73$, alors $10x+15y+6\times3=73$, donc $10c+15y=55 \iff 2x+3y=11$.
   Donc $(x\,;\,y)$ est solution de l'équation $2x+3y=11$.

b. $2\times 7+3\times(-1)=14-3=11$ donc le couple $(7~;~-1)$ est solution de (E).

- Si le couple $(x~;~y)$ est solution de (E), alors $2x+3y=11$. De plus, on sait que $2\times 7+3\times(-1)=14-3=11$. En retranchant membre à membre ces deux égalités, on obtient : $2(x-7)+3(y+1)=0$ ou encore $2(x-7)=-3(y+1)$.
  On peut donc dire que le nombre 3 divise le produit $2(x-7)$; comme 2 et 3 sont premiers entre eux, on peut dire, d'après le théorème de Gauss, que 3 divise $x-7$. On peut donc écrire $x-7=3k$ avec $k\in\mathbf{Z}$ ou encore $x=7+3k$.
  De $2(x-7)=-3(y+1)$ et $x-7=3k$, on tire $2\times 3k=-3(y+1)$ ce qui entraîne $2k=-y-1$ ou encore $y=-1-2k$.
- Réciproquement, si $x=7+3k$ et $y=-1-2k$ avec $k\in\mathbf{Z}$, alors $2x+3y=2(7+3k)+3(-1-2k)=14+6k-3-6k=11$, donc le couple $(x~;~y)$ est solution de (E).

L'ensemble des solutions de (E) est donc l'ensemble des couples $(7+3k~;~-1-2k)$ où $k\in\mathbf{Z}$.

c. D'après les questions précédentes, les points appartenant au plan $\mathscr{P}$ et au plan d'équation $z=3$ et dont les coordonnées appartiennent à l'ensemble **N** des entiers naturels sont à chercher parmi les couples $(7+3k~;~-1-2k)$ où $k\in\mathbf{Z}$.

On cherche donc k de **Z** tel que $7+3k\in\mathbf{N}$ et $-1-2k\in\mathbf{N}$.

Il faut donc que $7+3k\geqslant 0$ et que $-1-2k\geqslant 0$, c'est-à-dire $k\geqslant -\dfrac{7}{3}$ et $k\leqslant -\dfrac{1}{2}$. Les deux seules valeurs possibles sont donc

- $k=-2$ ce qui donne $x=7+3(-2)=1$ et $y=-1-2(-2)=3$ donc le couple $(1~;~3)$;
- $k=-1$ ce qui donne $x=7+3(-1)=4$ et $y=-1-2(-1)=1$ donc le couple $(4~;~1)$.

2. Dans cette question, on se propose de déterminer tous les points $\mathrm{M}(x~;~y~;~z)$ du plan $\mathscr{P}$ dont les coordonnées sont des entiers naturels.

Soient x, y et z des entiers naturels tels que $10x+15y+6z=73$.

a. $10x+15y+6z=73$ donc $15y=73-10x-6z$

73 est un nombre impair, $10x$ et $6z$ sont deux nombres pairs, donc $73-10x-6z$ est un nombre impair. On en déduit que $15y$ est un nombre impair; il faut pour cela que y soit impair sinon $15y$ serait pair.

b. $10x+15y+6z=73$ donc $10x=73-15y-6z$

$$\left.\begin{array}{r}10=3\times 3+1\equiv 1~[3]\implies 10x\equiv x~[3]\\ \left.\begin{array}{lcl}73=3\times 24+1 & \implies & 73\equiv 1~[3]\\ 15=5\times 3\equiv 0~[3] & \implies & 15y\equiv 0~[3]\\ 6=2\times 3\equiv 0~[3] & \implies & 6z\equiv 0~[0]\end{array}\right\}\implies 73-15y-6z\equiv 1~[3]\end{array}\right\}\implies x\equiv 1~[3]$$

c. On pose alors : $x=1+3p$, $y=1+2q$ et $z=3+5r$, où p, q et r sont des entiers naturels.

$$\begin{aligned}M(x~;~y~;~z)\in\mathscr{P} &\iff 10x+15y+6y=73 \iff 10(1+3p)+15(1+2q)+6(3+5r)=73\\ &\iff 10+30p+15+30q+18+30r=73 \iff 30p+30q+30r=30\\ &\iff p+q+r=1.\end{aligned}$$

d. On cherche les triplets $(1+3p~;~1+2q~;~3+5r)$ où p, q et r sont des entiers naturels tels que $p+q+r=1$. Il existe trois solutions :

- $p=1$, $q=0$ et $r=0$, donc $(x~;~y~;~z)=(4~;~1~;~3)$;
- $p=0$, $q=1$ et $r=0$, donc $(x~;~y~;~z)=(1~;~3~;~3)$;
- $p=0$, $q=0$ et $r=1$, donc $(x~;~y~;~z)=(1~;~1~;~8)$.

Ce sont les coordonnées des trois points de $\mathscr{P}$ à coordonnées dans **N**.