1^{eres} S – Correction du devoir commun de mathématiques
07 février 2018

Exercice 1 – $0,5+1+1+2+0,5+2+1+1=9$ points

1)

a. $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{AB}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires de même sens donc (CD) et (AB) sont parallèles et $ABDC$ est un trapèze.

b. $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_D+5 \\ y_D-0 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D+5=8 \\ y_D=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D=3 \\ y_D=-4 \end{cases}$ donc $D(3;-4)$

2)

a. Pour B :$6\times 2+2-14=0$ donc $B\in d$.
Pour D : $6\times(-3)-4-14=0$ donc $D\in d$.

b. $M(x;y)\in(AC)$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x+2 \\ y-4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ colinéaires
$\Leftrightarrow -4(x+2)-(-3)(y-4)=0$
$\Leftrightarrow -4x+3y-20=0$ donc une équation cartésienne de (AC) est $-4x+3y-20=0$.

c. $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ Test de colinéarité : $1\times(-4)-(-6)\times(-3)=-22\neq 0$

Donc $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et les droites (BD) et (AC) ne sont pas parallèles et sont donc sécantes.

d. $E(x;y)\in(BD)\cap(AC) \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+y-14=0 \\ -4x+3y-20=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-6x+14 \\ -4x+3(-6x+14)-20=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-6x+14 \\ -22x+22=0 \end{cases}$

D'où $E(x;y)\in(BD)\cap(AC) \Leftrightarrow \begin{cases} y=-6\times 1+14 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=8 \\ x=1 \end{cases}$ donc $E(1;8)$

3)

a. K milieu de $[AB]$: $x_K=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{-2+2}{2}=0$ et $y_K=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{4+2}{2}=3$ donc $K(0;3)$
L milieu de $[CD]$: $x_L=\frac{-5+3}{2}=-1$ et $y_L=\frac{0-4}{2}=-2$ donc $L(-1;-2)$

b. $\overrightarrow{EK}\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EL}\begin{pmatrix} -2 \\ -10 \end{pmatrix}$ On a donc clairement $\overrightarrow{EL}=2\overrightarrow{EK}$ donc $\overrightarrow{EK}$ et $\overrightarrow{EL}$ sont colinéaires et les points E, K et L sont alignés.

Exercice 2 – $4+1+1+2=8$ points

1. Dans chacun des calculs suivants, la dernière mesure donnée est la mesure principale de l'angle, et k et k' appartiennent à $\mathbb{Z}$:

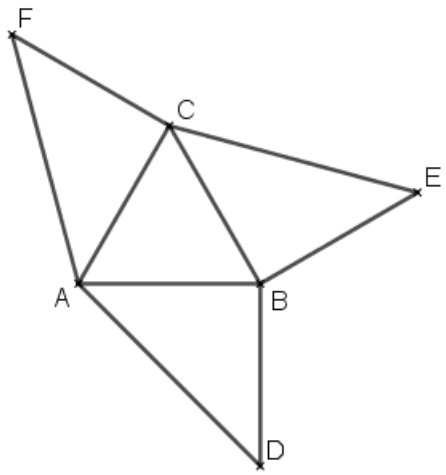
a) $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CA})=(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{CA})+k\times 2\pi=\frac{\pi}{3}+\pi+k\times 2\pi=\frac{4\pi}{3}+k\times 2\pi=-\frac{2\pi}{3}+k'\times 2\pi$

b) $(\overrightarrow{BD};\overrightarrow{BC})=(\overrightarrow{BD};\overrightarrow{BA})+(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})+k\times 2\pi=-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}+k\times 2\pi=-\frac{5\pi}{6}+k\times 2\pi$

c) $(\overrightarrow{BD};\overrightarrow{BE})=2\pi-\left[(\overrightarrow{BE};\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA})+(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BD})\right]+k\times 2\pi=2\pi-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}+k\times 2\pi=\frac{2\pi}{3}+k\times 2\pi$

d) $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BE})=(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BA})+(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BE})+k\times 2\pi$
$(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BE})=-\frac{\pi}{3}+\pi-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}+k\times 2\pi=-\frac{\pi}{6}+k\times 2\pi$

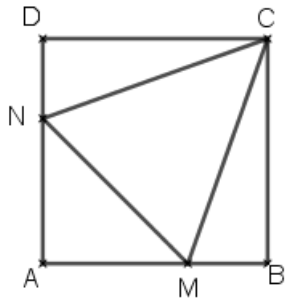
2. BDE est isocèle en B donc ses angles à la base sont égaux, ainsi :
$2(\overrightarrow{DE};\overrightarrow{DB})=\pi-(\overrightarrow{BD};\overrightarrow{BE})+k\times 2\pi=\pi-\frac{2\pi}{3}+k\times 2\pi=\frac{\pi}{3}+k\times 2\pi \quad ; \quad k\in\mathbb{Z}$
On a donc bien que $(\overrightarrow{DE};\overrightarrow{DB})=\frac{\pi}{6}+k\times 2\pi \quad ; \quad k\in\mathbb{Z}$



3. $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{DE})=(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BA})+(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BD})+(\overrightarrow{BD};\overrightarrow{DB})+(\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DE})+k\times 2\pi$
$(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{DE})=-\frac{\pi}{3}+\pi+\frac{\pi}{2}+\pi-\frac{\pi}{6}+k\times 2\pi=2\pi+k\times 2\pi\,; \quad k\in\mathbb{Z}$
Donc $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires et ainsi (AC) et (DE) sont parallèles.

4. $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{DE})=2\pi+k\times 2\pi \;\; ; \quad k\in\mathbb{Z}$
Donc $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires de même sens, et ainsi il existe un réel α positif tel que $\overrightarrow{DE}=\alpha\times\overrightarrow{AC}$.
Dans BDE, on note H le pied de la hauteur issue de B. BDE étant isocèle, H est alors le milieu de $[DE]$.
Dans le triangle BDH rectangle en H on a donc : $\cos\widehat{BDH}=\frac{DH}{DB}$
Ainsi $DH=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\times DB=\frac{\sqrt{3}}{2}\times AC$
car $DB=AB=AC$.
Ainsi $DE=2\times DH=\sqrt{3}\,AC$ et on a donc $\overrightarrow{DE}=\sqrt{3}\times\overrightarrow{AC}$

Exercice 3 – 4 points



Dans le triangle AMN rectangle en A, on utilise le théorème de Pythagore : $MN^2 = AM^2 + AN^2$
En posant $AM = x$, on a donc $MN^2 = 2x^2$.
Dans le triangle CBM rectangle en B, on utilise le théorème de Pythagore : $CM^2 = CB^2 + BM^2$
d'où $CM^2 = 1^2 + (1-x)^2 = 1 + 1 - 2x + x^2 = 2 - 2x + x^2$
De la même manière dans CDN rectangle en D, on a $CN^2 = 1^2 + (1-x)^2 = CM^2$
Or CMN équilatéral$\Leftrightarrow CM = CN = MN \Leftrightarrow CM^2 = CN^2 = MN^2$ car tout est positif.
D'où CMN équilatéral $\Leftrightarrow 2 - 2x + x^2 = 2x^2 \Leftrightarrow -x^2 - 2x + 2 = 0$
Cette équation est de degré 2. $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-1) \times 2 = 12$ donc l'équation a deux solutions
$x_1 = \frac{2+\sqrt{12}}{-2} = \frac{2+2\sqrt{3}}{-2} = -1 - \sqrt{3}$ et $x_2 = \frac{2-2\sqrt{3}}{-2} = -1 + \sqrt{3}$.
Dans le contexte, x est une longueur donc est positif. Il y a donc une unique solution : $AM = \sqrt{3} - 1$.

Exercice 4 – $1 + 1 + 1, 5 + 1, 5 + 1 + 1 = 7$ points

Partie 1

a) $\bar{x} = \frac{1\times6+2\times12+\cdots+12\times4}{6+12+\cdots+4} = \frac{2813}{450} \approx 6{,}25$

$$V = \frac{1^2 \times 6 + 2^2 \times 12 + \cdots + 12^2 \times 4}{6 + 12 + \cdots + 4} - \bar{x}^2 = \frac{19535}{450} - \left(\frac{2813}{450}\right)^2 \approx 4{,}335$$

$\sigma = \sqrt{V} \approx 2{,}08$

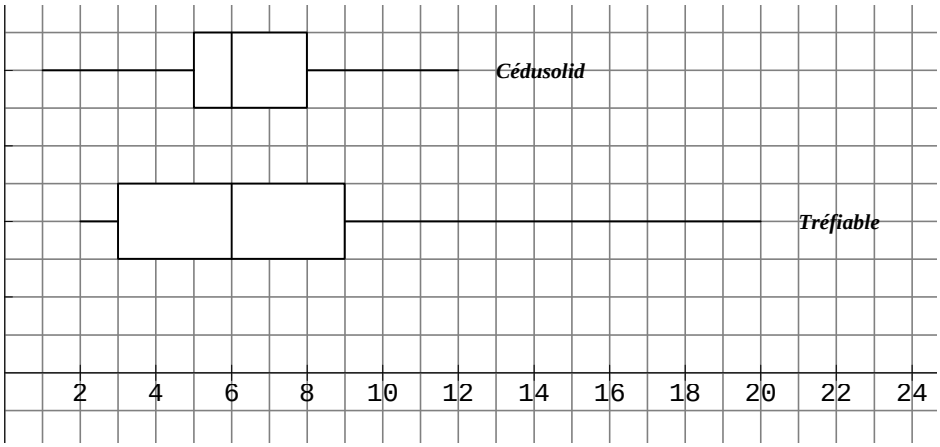
b) En notant x_T la moyenne totale : $x_T = \frac{\bar{x}_{Cédusolid}\times450+\bar{x}_{Tréfiable}\times300}{450+300} \approx \frac{6{,}25\times450+7{,}05\times300}{750} \approx 6{,}57$
La moyenne du nombre d'interventions sur l'ensemble des machines est de 6,57.

Partie 2

Nombre d'interventions	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nombre de machines Cédusolid	6	12	21	42	81	90	83	51	39	12	9	4
Effectif cumulé croissant	6	18	39	81	162	252	335	386	425	437	446	450

1) Pour la médiane, il y a 450 valeurs donc la médiane se situe entre la 225ème et la 226ème valeur. Le calcul des effectifs cumulés croissants nous permet de dire que ces deux valeurs sont égales à 6 donc $Med = 6$.
Pour Q_1 : $\frac{450}{4} = 112{,}5$ donc Q_1 est la 113ème valeur et $Q_1 = 5$.
Pour Q_3 : $450 \times \frac{3}{4} = 337{,}5$ donc Q_3 est la 338ème valeur et $Q_3 = 8$.

2)



Les médianes des deux séries de données sont les mêmes. Par contre les données pour les machines Cédusolid sont plus homogènes que pour les machines Tréfiable. En effet, l'écart interquartile est de 3 pour Cédusolid contre 6 pour Tréfiable, tout comme l'étendue qui est de 11 pour Cédusolid contre 18 pour Tréfiable. En règle générale, les machines Cédusolid demandent donc moins d'interventions que les machines Tréfiable.

3)

a. FAUX : Les médianes des deux séries sont égales à 6. Il y a donc environ la moitié des machines de chaque marque qui nécessitent un nombre d'interventions inférieur ou égal à 6. Or il y a davantage de machines Cédusolid donc il y a davantage de machines Cédusolid concernées.

b. FAUX : Le 3ème quartile d'une série de données est une donnée de la série or on ne peut pas avoir 8,5 interventions sur une machine.

Exercice 5. $3+6+3=12$ points

Partie A – $0{,}5$ pr $2a+b=16$ + 1 pr $f'(x)$ + $0{,}5$ pour $a+b=0$ + 1 pr résolution

D'après l'énoncé, $A(2;4)$ appartient à $\mathcal{C}$ donc $f(2)=4$ ce qui donne $\frac{2a+b}{4}=4$ ou encore $2a+b=16$.

Par ailleurs, f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x)=ax+b$ et $v(x)=x^2$.

u et v sont donc dérivables sur $]0;+\infty[$ avec $u'(x)=a$ et $v'(x)=2x$, et v ne s'annule pas sur $]0;+\infty[$.

Donc f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $f'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$.

Donc $f'(x)=\dfrac{a\times x^2-2x(ax+b)}{(x^2)^2}=\dfrac{-ax^2-2bx}{x^4}=\dfrac{(-ax-2b)x}{x^4}=\dfrac{-ax-2b}{x^3}$

La tangente à $\mathcal{C}$ au point A est horizontale d'après l'énoncé, or le coefficient directeur d'une tangente au point d'abscisse a est égale à $f'(a)$ donc $f'(2)=0$ ce qui donne $\frac{-2a-2b}{8}=0$ d'où $-2a-2b=0$ ou encore $a+b=0$.

On est donc ramené au système $\begin{cases}2a+b=16\\a+b=0\end{cases}$ or $\begin{cases}2a+b=16\\a+b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a-a=16\\b=-a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=16\\b=-16\end{cases}$

On obtient alors $f(x)=\frac{16x-16}{x^2}$.

Partie B – $1+1,5+1+2,5$

1) D'après les calculs de la partie A, on a que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $f'(x)=\frac{-ax-2b}{x^3}$ avec $a=16$ et $b=-16$ ce qui donne donc $f'(x)=\frac{-16x+32}{x^3}$.

2) Une équation de T est $y=f'(4)(x-4)+f(4)$ or $f'(4)=\frac{-16\times4+32}{4^3}=-0{,}5$ et $f(4)=\frac{16\times4-16}{x^2}=3$ donc une équation de T est $y=-0{,}5(x-4)+3$ ce qui donne $y=-0{,}5x+5$.

3) Pour tout réel x :

$(x-4)^2\times(0{,}5x-1)=(x^2-8x+16)(0{,}5x-1)=0{,}5x^3-x^2-4x^2+8x+8x-16=0{,}5x^3-5x^2+16x-16$

4) Pour étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et de T, on étudie le signe de $f(x)-(-0{,}5x+5)$ pour $x\in]0;+\infty[$:

$f(x)-(-0{,}5x+5)=\dfrac{16x-16}{x^2}+0{,}5x-5=\dfrac{16x-16+0{,}5x^3-5x^2}{x^2}=\dfrac{(x-4)^2(0{,}5x-1)}{x^2}$

en reconnaissant l'expression développée de la question 3.

Sur $]0;+\infty[$, $(x-4)^2\geq0$ et $x^2>0$ donc $f(x)-(-0{,}5x+5)$ est du signe de $0{,}5x-1$ or $0{,}5x-1\geq0\Leftrightarrow0{,}5x\geq1\Leftrightarrow x\geq2$ donc :

sur $]0;2]$, $f(x)-(-0{,}5x+5)\leq0$ donc $\mathcal{C}$ est en dessous de T

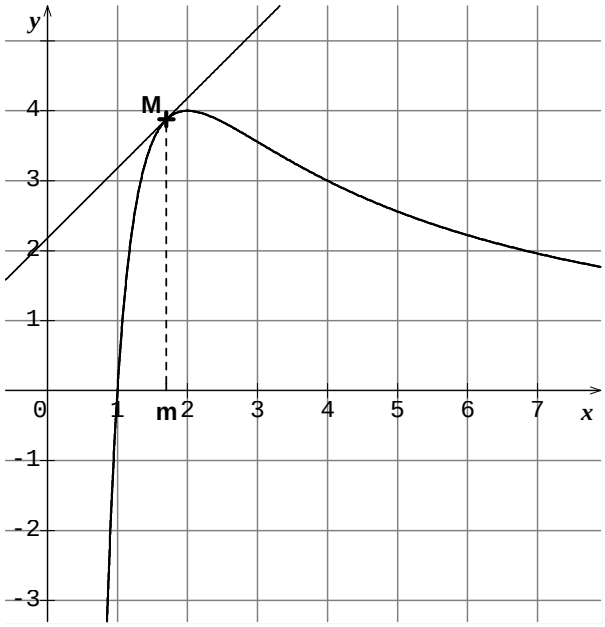
sur $[2;+\infty[$, $f(x)-(-0{,}5x+5)\geq0$ donc $\mathcal{C}$ est au-dessus de T.

Partie C – $1+0,5+1,5=3$ points

1) Voir la courbe ci-contre

2) Il semble que $1\leq m\leq2$.

3)

a	b	$b-a$	x	$f'(x)$
1	2	1	1,5	2,37
1,5	2	0,5	1,75	0,75
1,5	1,75	0,25	1,625	1,4
1,625	1,75	0,125	1,6875	1,04
1,6875	1,75	0,0625		

En sortie, l'algorithme affiche $a=1{,}6875$ et $b=1{,}75$ donc on a $1{,}6875\leq m\leq1{,}75$.